UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID
Escuela Universitaria de
Ingeniería Técnica Industrial

POLITÉCNICA

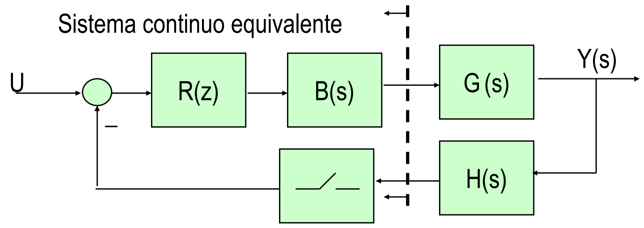
DISEÑO DE CONTROLADORES DISCRETOS

DR. BASIL M. AL HADITHI

DISEÑO DE CONTROLADORES DISCRETOS

- Discretización de controladores continuos
- Controladores PIDs discretos
- Extensión de técnicas clásicas al diseño de controladores discretos
- Método de asignación de polos y ceros.

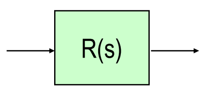
Discretización de reguladores continuos

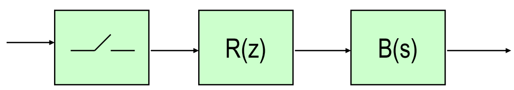


- Como ya se ha visto se puede hacer el estudio como un sistema continuo
  - Se diseña un regulador continuo para luego calcular uno discreto equivalente al continuo
  - La equivalencia no es exacta, ya que el muestreador no tiene función de transferencia

Métodos de discretización

- A partir de la función de transferencia R(s), encontrar la función de transferencia R(z), de modo que el conjunto muestreador-regulador discreto-bloqueador se comporte de forma equivalente al continuo





Métodos de discretización

- Aproximación del operador derivada
  - Consiste en aproximar la derivada por el cociente de incrementos

$$x'_k = \left.\frac{dx(t)}{dt}\right|_{t=kT} \approx \frac{x_k - x_{k-1}}{T}$$

  - Esta relación equivale a la función de transferencia

$$Z\{x'_k\} = \frac{X(z) - z^{-1}X(z)}{T} = \frac{1-z^{-1}}{T}X(z)$$

  - Se sustituye directamente

$$R(z) = R(s)\Big|_{s=\frac{1-z^{-1}}{T}}$$

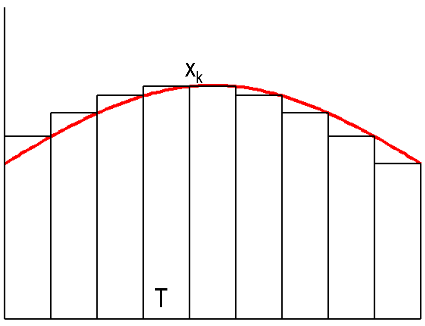
Métodos de discretización

- Aproximación del operador derivada
  - Esta sustitución es equivalente a

$$w(s) = \frac{1}{s}X(s) \leftrightarrow W(z) = \frac{T}{1-z^{-1}}X(z)$$

$$w_k = w_{k-1} + Tx_k$$

  - Es decir se está sustituyendo la integral por una integración rectangular



Métodos de discretización

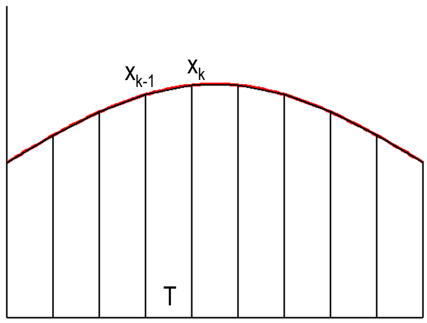
- Integración trapezoidal
  - Se basa en sustituir la integral por una integración trapezoidal

$$w_k = w_{k-1} + \frac{T}{2}(x_k + x_{k-1})$$

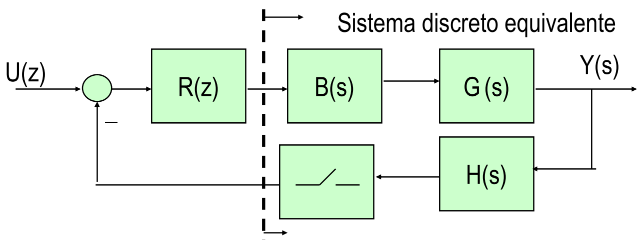
$$W(z) = \frac{T}{2}\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}X(z)$$

$$R(z) = R(s)\Big|_{\frac{1}{s}=\frac{T}{2}\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}}$$

  - También se conoce como operador de Tustin



Diseño de reguladores discretos



- Estudio como sistema discreto
  - Se calcula el equivalente discreto del conjunto bloqueador-sistema-muestreador (la equivalencia es exacta)
  - Se calcula un regulador discreto de forma directa

Diseño en el plano z

- Se basa en suponer que la función de transferencia en cadena cerrada se puede reducir a sus polos dominantes
- Se define entonces la región de especificaciones, como la zona del plano complejo donde ubicar los polos dominantes para que se cumplan las especificaciones
- Con los reguladores se consigue que el lugar de las raíces pase por la región de especificaciones

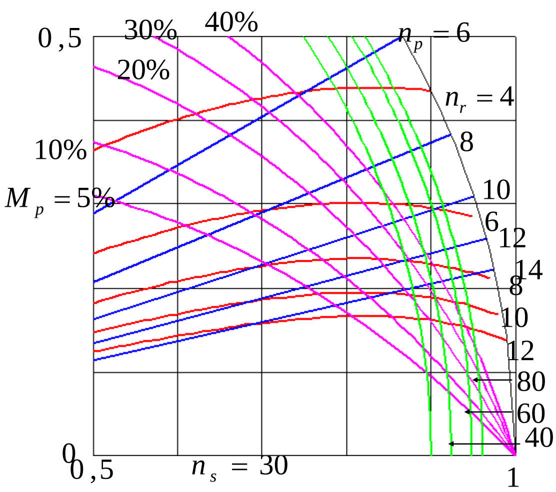
Región de especificaciones

$$n_r = \frac{\gamma}{\theta}$$

$$n_p = \frac{\pi}{\theta}$$

$$M_p = e^{-\frac{\pi\sigma}{\theta}} 100\%$$

$$n_s = \frac{\pi}{\sigma}$$



Reguladores P

- El regulador proporcional tiene como función de transferencia

$$R(z) = K_R$$

  - Al variar K_R varían los polos del sistema realimentado
  - Si el sistema en cadena abierta es de tipo cero existirá error de posición
    - Interesa K_R grande para minimizar e_p
    - Interesa K_R pequeño para tener mejor dinámica
- Válido para especificaciones poco restrictivas
- Se ajusta con el lugar de las raíces como se vio en continuos

ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERÍA TÉCNICA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

Reguladores PI

- El regulador proporcional-integral tiene como función de transferencia

$$R(z) = K_R \frac{z-a}{z-1}$$

  - Incrementa en uno el tipo del sistema
  - Se elimina el error de posición
  - Generalmente ralentiza la respuesta del sistema
- Usado cuando hay restricciones de régimen permanente y las restricciones dinámicas no son fuertes.
- Se ajusta K_R con el lugar de las raíces
  - Un valor del cero puede ser

$$a = e^{-\frac{1}{2}\sigma_d T}$$

Reguladores PD

- El regulador proporcional-derivativo tiene como función de transferencia

$$R(z) = K_R \frac{z-b}{z}$$

  - La acción derivativa anticipa, actuando como predicción
  - Sistemas más rápidos y menos oscilatorios
- Usado cuando hay restricciones temporales y las restricciones de régimen permanente no son fuertes
- Diseño con el lugar de las raíces
  - Se determina la posición de los polos dominantes en la región de especificaciones
  - La posición del cero b se calcula mediante el criterio del argumento
  - Y la K_R mediante el del módulo

Reguladores PID

- El regulador proporcional-derivativo tiene como función de transferencia

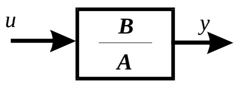
$$R(z) = K_R \frac{z-a}{z-1} \frac{z-b}{z}$$

  - Incrementa en uno el tipo del sistema
  - Se elimina el error de posición
  - La acción derivativa anticipa, actuando como predicción
  - Sistemas más rápidos y menos oscilatorios
- Usado cuando hay restricciones temporales y de de régimen permanente
- Diseño con el lugar de las raíces
  - Se determina la posición de los polos dominantes en la región de especificaciones
  - La posición del cero del PI se ajusta con el criterio indicado
  - La posición del cero b se calcula mediante el criterio del argumento
  - Y la K_R mediante el del módulo

Reguladores complejos

- Aunque el control PID sea el más clásico, la potencia de cálculo de los computadores hace que se puedan plantear estructuras de control y reguladores mucho más complejos
- Algunos ejemplos
  - Métodos de asignación de polos y ceros
  - Control predictivo basado en modelos
  - Control adaptativo
  - Control óptimo
  - Control robusto
  - ...

Asignación de Polos y Ceros



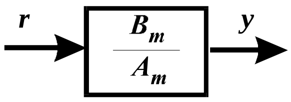
- Se supone el sistema

$$Ay = Bu$$

  - *A* y *B* polinomios en *s* o en *z*
  - Sin raíces comunes
  - *A* mónico (coeficiente de mayor grado unitario)

$$gr(B) \leq gr(A)$$

Asignación de Polos y Ceros



- se pretende conseguir que tenga un comportamiento como el modelo

$$A_m y = B_m r$$

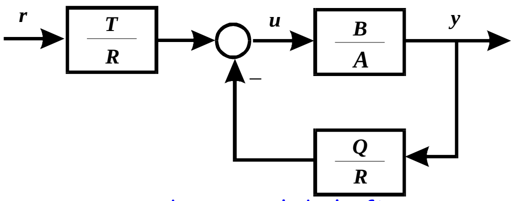
  - A_m y B_m polinomios en s o en z
  - sin raíces comunes
  - A_m mónico

$$gr(B_m) \leq gr(A_m)$$

$$gr(A_m) - gr(B_m) \geq gr(A) - gr(B)$$

ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERÍA TÉCNICA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

Asignación de Polos y Ceros



- Se toma la estructura de control de la figura

$$u = \frac{T}{R} r - \frac{Q}{R} y$$

  - R, T y Q polinomios en s o en z

$$gr(T) \leq gr(R)$$

$$gr(Q) \leq gr(R)$$

Asignación de Polos y Ceros

- El diseño debe cumplir entonces

$$\frac{T}{R}\frac{\frac{B}{A}}{1+\frac{B}{A}\frac{Q}{R}} = \frac{TB}{AR+BQ} = \frac{B_m}{A_m}$$

- Además si se descompone B

$$B = B^+ B^- \quad \begin{cases} B^+ \text{ ceros "estables" mónico} \\ B^- \text{ parte restante} \end{cases}$$

- el control no debe intentar cancelar B^- ya que se produciría inestabilidad, por lo que B^- debe dividir a B_m

$$B_m = B_{m1} B^-$$

Asignación de Polos y Ceros

- Sustituyendo

$$\frac{TB^+B^-}{AR+BQ} = \frac{B_{m1}B^-}{A_m} \qquad \frac{TB^+}{AR+BQ} = \frac{B_{m1}}{A_m}$$

- Que se puede rescribir como

$$AR + BQ = \frac{TB^+ A_m}{B_{m1}}$$

- El primer miembro de la igualdad es un polinomio, por lo que para que exista solución B_{m1} debe dividir a T

$$T = A_0 B_{m1}$$

Asignación de Polos y Ceros

- quedando la ecuación como

$$AR + BQ = A_0 B^+ A_m$$

- para que la solución verifique las restricciones de grado A_0 debe cumplir

$$gr(A_0) \geq 2gr(A) - gr(A_m) - gr(B^+) - 1$$

- El polinomio A_0 no aparece en la función de transferencia total, lo que significa que se compensa con polos de la cadena cerrada, por lo que para no interferir en la dinámica del sistema se debe elegir con raíces "estables" y de una dinámica más rápida que A_m

Asignación de Polos y Ceros

- Sustituyendo B por su descomposición

$$AR + B^+ B^- Q = A_0 B^+ A_m$$

- se observa que B^+ divide a dos términos de la ecuación, por lo que debe dividir al tercero y, dado que A y B no tienen raíces comunes, debe dividir a R

$$R = B^+ R_1$$

- Quedando finalmente la siguiente ecuación diofántica

$$AR_1 + B^- Q = A_0 A_m$$

- El polinomio R1 será mónico y de grado

$$gr(R_1) = gr(A_0) + gr(A_m) - gr(A)$$

- y el grado de Q se elige

$$gr(Q) = gr(R) = gr(B^+) + gr(R_1)$$

Asignación de Polos y Ceros

- Partiendo del modelo del proceso, el procedimiento de diseño es
  - determinar el modelo a alcanzar con las restricciones indicadas
  - determinar el grado del polinomio A_0, recomendándose utilizar el menor posible
  - determinar A_0
  - determinar los grados de R_1 y Q
  - calcular los coeficientes de R_1 y Q que verifiquen la ecuación diofántica, mediante igualación de coeficientes